....

Lösungsvorschlag

3A-Z

Lineare Algebra I: Klausur II

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2021

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Das Tragen einer medizinischen Maske oder einer FFP2-Maske ist während der gesamten Klausur vorgeschrieben.
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name: ....
  Matrikelnr.: ....

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 1 \\
-2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & = & -t^2-1 \\
-x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 0
\end{array}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid \mathbf{b})$ für das System auf. Formen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenoperationen so in eine Matrix $(A' \mid \mathbf{b}')$ um, dass A' Zeilenstufenform hat.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}(A)$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems. Geben Sie ferner in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $\mathcal{L}(A \mid \mathbf{b})$ des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a)

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ ist durch

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-2 & -2 & -1 & -3 & -1 & -t^2-1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

gegeben. Wir wenden elementare Zeilenoperationen an:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-2 & -2 & -1 & -3 & -1 & -t^2-1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\underset{\mathrm{II}+\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^2+1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\underset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+2\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^2+1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\underset{\text{tauschen}}{\overset{\text{Ver-}}{\rightsquigarrow}}
\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^2+1
\end{array}\right)}$$

$= (A'|b')$ mit A' in Zeilenstufenform

(b)

Der vierten Zeile entnehmen wir, dass $\mathcal{L}(A'|b')$ genau dann nicht leer ist, wenn $-t^2+1=0$, also $t=\pm 1$ ist.

(c)

Nach Teil (b) betrachten wir $t=\pm 1$. Wir streichen die Nullzeile und bringen die resultierende Matrix auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{III}]{\mathrm{I}+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}\cdot(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Nun wenden wir den Algorithmus aus der Vorlesung an:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Nicht-Pivot-Spalten}]{\text{Vorzeichenwechsel}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Zeilen einfügen}]{\text{Passende Standardbasis-}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Jetzt gelten:

- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis von $\mathcal{L}(A)$
- $\mathcal{L}(A|b) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, & t = \pm 1 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 1

(Seite 4)

Aufgabe 2
Seien U und V die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

$$U := \mathbb{R}^3 \qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y + 2z = 0 \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel B und B' Basen sind von U, und dass die folgenden Tupel C und C' Basen sind von V:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Sei $f: U \to V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$$_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $_{C'} M_{B'}(f)$, also die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B' und C'.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a)

Da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ genügt es zu zeigen, dass B und B' linear unabhängig sind. Dies ist der Fall, da

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\Delta\text{s-Matrix}}{\overset{\text{obere}}{=}} 1 \underset{3\times 3}{\overset{\text{Leibniz}}{=}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det(B').$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ ist, kann V nicht ganz $\mathbb{R}^3$ sein. Somit ist $\dim(V) \leq 2$ und es genügt erneut zu zeigen, dass C und C' linear unabhängig sind.

Sind nun $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

- $\underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda + 2\mu \\ \mu \end{pmatrix}} = 0$, so erhalten wir sofort $\lambda = 0 = \mu$

• $\underbrace{\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu\\2\mu\\-\lambda-\mu\end{pmatrix}} = 0$, so ist $2\mu = 0$, also $\mu = 0$ und somit auch

$\lambda = 0$.

Also sind C und C' linear unabhängig.

(b)

Wir berechnen Linksinverse zu B und C':

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right) \underset{II+III}{\overset{I+III}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right) \overset{I+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = B^{-1}$ (beidseitige Inverse, da B quadratisch)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1&2&1&0&0\\0&2&0&1&0\\-1&-1&0&0&1\end{array}\right) \overset{I+III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&1&0&1\\0&2&0&1&0\\-1&-1&0&0&1\end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-2I}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&1&0&1\\0&0&-2&1&-2\\-1&0&1&0&2\end{array}\right) \underset{\text{und vertauschen}}{\overset{III\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&-1&0&-2\\0&1&1&0&1\\0&0&-2&1&-2\end{array}\right)$$

Somit ist $\begin{pmatrix}1&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ eine Linksinverse zu C' und wir erhalten

$${}_{C'}M_{B'}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&2\\0&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1&0&3\\1&-2&0\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&3\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&2\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1&7&5\\1&0&0\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&5\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-3&-7&-5\\2&7&5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
(Seite 9)

....

Aufgabe 3

Kreuzen Sie in den folgenden sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Ist M eine Menge und sind A und B zwei Teilmengen von M, so gilt:

☐ $M \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

☐ $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

☒ $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

(2) Eine Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist genau dann **injektiv**, wenn

☒ jede komplexe Zahl höchstens ein Urbild unter f besitzt.

☐ jede reelle Zahl auf eine komplexe Zahl abgebildet wird.

☐ die Faser $f^{-1}(0)$ nur aus der reellen 0 besteht.

(3) Folgende Relationen auf der Menge $\mathbb{Z}$ sind **transitiv**:

☐ $m \sim n \Leftrightarrow m = n - 1$

☒ $m \sim n \Leftrightarrow m - n \geq 0$

☒ $m \sim n \Leftrightarrow m$ teilt n

(4) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{array}{c} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ [a] \mapsto a \end{array}$ ☐ $\begin{array}{c} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ m \mapsto 100 - m \end{array}$ ☒ $\begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto z \cdot \overline{z} \end{array}$

(5) Es gibt:

☒ 6 verschiedene surjektive Abbildungen $\{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$.

☐ genau 8 bijektive Abbildungen $\{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$.

☒ eine injektive Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

(6) Folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abelsche Gruppen bezüglich der Addition:

☐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

☐ $\{m \mid m$ ist eine ungerade ganze Zahl$\}$

☒ $\{m \cdot \pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$

(7) In den folgenden Ringen R gilt, dass aus $a \cdot b = 0$ bereits $a = 0$ oder $b = 0$ folgt $(a, b \in R)$:

☒ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

☒ $\mathbb{R}[X]$

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein für Vektorräume, über jedem Körper K?

☐ Jeder Vektorraum von positiver Dimension enthält unendlich viele Elemente.

☐ Jeder Vektorraum enthält mindestens zwei Elemente, nämlich 0 und 1.

☒ Es gibt einen 1-elementigen Vektorraum.

(2) Folgende Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$:

☒ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}$

☐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$

(3) Für eine Teilmenge A eines Vektorraumes besteht die lineare Hülle $\langle A \rangle$ aus

☐ allen linear unabhängigen Vektoren aus A.

☐ allen linear abhängigen Vektoren aus A.

☒ allen Linearkombinationen von Vektoren aus A.

(4) Die folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-**linear**:

☒ $\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$

☒ $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (y-x, x-y) \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) &\to \mathbb{R}[X] \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$

(Hier ist χ_A das charakteristische Polynom von A.)

(5) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt:

☐ Stimmt der Zeilenrang von A mit dem Spaltenrang von A überein, so ist A invertierbar.

☒ Sind die Zeilen von A linear unabhängig, so ist A invertierbar.

☒ Sind die Spalten von A linear unabhängig, so ist A invertierbar.

(6) Für beliebige quadratische Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt:

☒ $\det(\mathbb{1}_n) = 1$.

☐ $\det(-A) = -\det(A)$.

☐ $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(7) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ sind diagonalisierbar:

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Sei K ein Körper. Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ mit der Eigenschaft, dass es eine natürliche Zahl k mit $A^k = 0$ gibt. Die *kleinste* solche natürliche Zahl bezeichnen wir im Folgenden mit m. Sei zudem $\mathbf{v} \in K^n$ ein Vektor mit $A^{m-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(a) Zeigen Sie im Spezialfall

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dass tatsächlich eine Zahl k mit der angegebenen Eigenschaft existiert. Bestimmen Sie in diesem Fall m, und geben Sie einen geeigneten Vektor $\mathbf{v} \in K^2$ an.

Betrachten Sie nun wieder den allgemeinen Fall:

(b) Begründen Sie, dass auch $A^i\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sein muss für $0 \leq i \leq m-2$.

(c) Zeigen Sie, dass das Tupel $(A^i\mathbf{v})_{0 \leq i \leq m-1} = (\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \ldots, A^{m-1}\mathbf{v})$ linear unabhängig ist.

(d) Folgern Sie, dass $m \leq n$ sein muss.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a)

Da $A^1 \neq 0$ ist, muss $m \geq 2$ sein. Nun gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sodass auch $m \leq 2$ und somit $m = 2$ gilt. Betrachten wir nun $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^2$, so erhalten wir

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(b)

Wäre $A^i v = 0$ für ein $0 \leq i \leq m-2$, so erhielten wir

$$0 \neq A^{m-1}v = A^{m-1-i}\underbrace{A^i v}_{=0} = A^{m-1-i} \cdot 0 = 0,$$

also einen Widerspruch. Somit ist $A^i v \neq 0$ für alle $0 \leq i \leq m-2$.

(c)

Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in K$ mit

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i A^i v}_{= \lambda_0 v + \lambda_1 A v + \dots + \lambda_{m-1} A^{m-1} v} = 0.$$

Multiplikation mit A^{m-1} liefert

$$0 = A^{m-1} \cdot 0 = A^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i A^i v = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i A^{m-1+i} v \underset{\substack{m-1+i \geq m \\ \text{für } i \geq 1}}{\overset{\uparrow}{=}} \lambda_0 \underbrace{A^{m-1} v}_{\neq 0}$$

und somit $\lambda_0 = 0$.
Nun genügt es zu zeigen, dass falls $\lambda_0 = \dots = \lambda_\ell = 0$ für ein $0 \leq \ell \leq m-2$, auch $\lambda_{\ell+1} = 0$ ist.
Gilt $\lambda_0 = \dots = \lambda_\ell = 0$ für ein $0 \leq \ell \leq m-2$, so also auch

$$0 = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i A^i = \sum_{i=\ell+1}^{m-1} \lambda_i A^i.$$

Daher liefert die Multiplikation mit $A^{m-1-(\ell+1)}$ analog zu oben

$$0 = \lambda_{\ell+1} \underbrace{A^{m-1} v}_{\neq 0}$$

und somit $\lambda_{\ell+1} = 0$. Also gilt $\lambda_0 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$, sodass das Tupel $(A^i v)_{0 \leq i \leq m-1}$ linear unabhängig ist.

(d)

Da $\dim(K^n) = n$ und die Dimension die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren beschreibt, folgt daraus, dass $\underbrace{(A^i v)_{0 \leq i \leq m-1}}_{n \text{ Vektoren}}$ linear unabhängig ist, bereits $m \leq n$.

Aufgabe 5
(Seite 14)

Aufgabe 6
Seien A und B reelle $(n \times n)$-Matrizen.

(a) Beweisen Sie ausführlich, dass, falls μ ein Eigenwert von A ist, μ^2 ein Eigenwert von A^2 ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von AB auch ein Eigenwert von BA ist.

Tipp: Konstruieren Sie aus einem Eigenvektor von AB einen Eigenvektor von BA. Weisen Sie insbesondere nach, dass der von Ihnen konstruierte Vektor nicht der Nullvektor ist.

(c) Zeigen Sie, dass, falls 0 ein Eigenwert von AB ist, 0 auch ein Eigenwert von BA ist.

Tipp: Dieser Aufgabenteil lässt sich ohne konkrete Konstruktion eines Eigenvektors lösen.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a)

Ist μ ein Eigenwert von A, so existiert ein Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit

$$Av = \mu v.$$

Daher gilt

$$A^2 v = A \cdot \underbrace{Av}_{=\mu v} = A \cdot \mu v = \mu \cdot \underbrace{Av}_{=\mu v} = \mu^2 v,$$

sodass auch μ^2 ein Eigenwert von A^2 ist.

(b)

Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von AB, so existiert ein Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit

$$ABv = \lambda v.$$

Multiplikation mit B liefert also

$$BABv = B\lambda v = \lambda Bv,$$

sodass Bv ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ ist, falls $Bv \neq 0$

ist. Wäre $Bv = 0$, so erhielten wir

$$0 = A \cdot 0 = ABv = \underbrace{\lambda}_{\neq 0}\underbrace{v}_{\neq 0} \neq 0$$

also einen Widerspruch. Demnach ist $Bv \neq 0$ und somit λ auch ein Eigenwert von BA.

(c)

Ist 0 ein Eigenwert von AB, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \chi_{AB}(0) = \det(AB - 0 \cdot \mathbb{1}_n) = \det(AB) = \det(A)\det(B) &= \det(B)\det(A) \\ &= \det(BA) \\ &= \det(BA - 0 \cdot \mathbb{1}_n) \\ &= \chi_{BA}(0). \end{aligned}$$

Eigenwerte sind genau die Nullstellen des Char. Polynomes

Determinante ist multiplikativ

Das char. Polynom χ_{BA} von BA besitzt dann also auch 0 als Nullstelle, sodass 0 ein Eigenwert von BA ist.